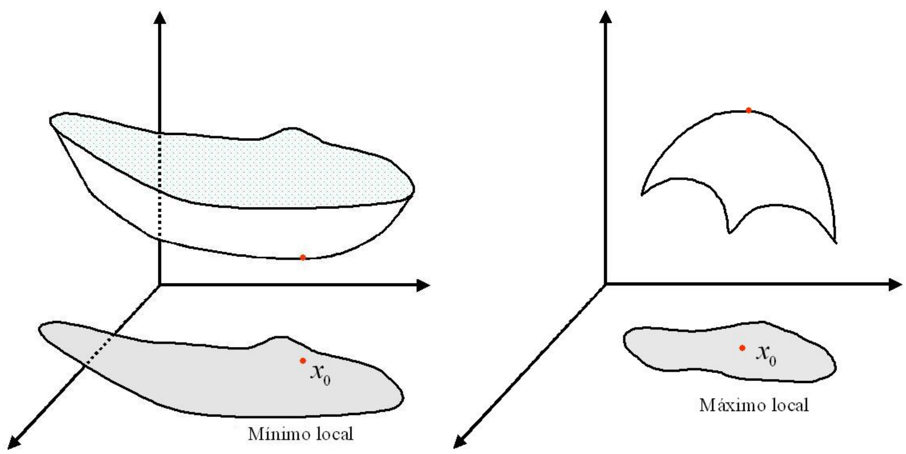
Extremos Locales

Entre las caracteristicas geometricas básicas de la gráficas de una función estan sus puntos extremos, en los cuales la función alcanza sus valores mayor y menor.

Definición 1. *Si $f : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar, dado un punto $x_0 \in u$ se llama mínimo local de f si existe una vecindad v de x_0 tal que $\forall \quad x \in v \quad f(x) > f(x_0)$. De manera analoga, $x_0 \in u$ es un máximo local si existe una vecindad v de x_0 tal que $f(x) < f(x_0) \quad \forall \quad x \in v$. El punto $x_0 \in u$ es un extremo local o relativo, si es un mínimo local o máximo local.*



Un punto x_0 es un punto crítico de f si $Df(x_0) = 0$.
Un punto crítico que no es un extremo local se llama punto silla.

Teorema 1. Criterio de la primera derivada *Si $u \in \mathbb{R}$ es abierto, la función $f : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $x_0 \in u$ es un extremo local entonces $\nabla f(x_0) = 0$, esto es x_0 es un punto crítico de f.*

Demostración.Supongamos que t alcanza su máximo local en x_0. Entonces para cualquier $h \in \mathbb{R}^n$ la función $g(t) = f(x_0 + th)$ tiene un máximo local en $t = 0$. Asi, del cálculo de una variable $g'(0) = 0$ ya que como $g(0)$ es máximo local, $g(t) \leq g(0)$ para $t > 0$ pequeño

$$\therefore \quad g'(0) = \lim_{t \to t_0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = 0$$

Analogamente para $t < 0$ pequeño tomamos

$$g'(0) = \lim_{t \to t_0^-} \frac{g(t) - g(0)}{t} = 0$$

Ahora por regla de la cadena

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_0 = \nabla f(x_0) \cdot h$$

Asi $\nabla f(x_0) \cdot h = 0 \quad \forall\, h$ de modo que $\nabla f(x_0) = 0$. En resumen si x_0 es un extremo local, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$. En otras palabras $\nabla f(x_0) = 0$. ■

Ejemplo Hallar los máximos y mínimos de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x-6y+14$$

Solución: Debemos identificar los puntos críticos de f resolviendo $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ para x,y,

$$2x-2=0 \quad 2y-6=0$$

De modo que el punto crítico es $(1,3)$. Como

$$f(x,y)=\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-6y+9\right)+4=(x-1)^2+(y-3)^2+4$$

tenemos que $f(x,y)\geq 4$ por lo tanto en $(1,3)$ f alcanza un mínimo relativo.

Ejemplo Considerar la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=4-x^2-y^2$ entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y$. f solo tiene un punto crítico en el origen, donde el valor de f es 4. Como

$$f(x,y)=4-(x^2+y^2)$$

tenemos que $f(x,y)\leq 4$ por lo tanto en $(0,0)$ f alcanza un máximo relativo.

Ejemplo En el siguiente ejemplo mostramos que no todo punto critico es un valor extremo
Sea $f(x,y)=x^2y+y^2x$ tenemos que sus puntos criticos son

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2xy+x^2=0$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix}2xy+y^2=0\\2xy+x^2=0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x=y\\x=-y\end{pmatrix}$$

tomando $x=-y$ tenemos que

$$2xy+y^2=0 \;\Rightarrow\; -2y^2+y^2=0 \;\Rightarrow\; -y^2=0\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; x=0$$

tomando $x=y$ tenemos que

$$2xy+y^2=0 \;\Rightarrow\; 2y^2+y^2=0 \;\Rightarrow\; -3y^2=0\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; x=0$$

por lo tanto $(0,0)$ es el único punto critico.
Ahora bien para $f(x,y)$ tomamos $x=y$

$$f(x,x)=2x^3$$

la cual es (<0 si $x<0$) y (>0 si $x>0$) por lo tanto el punto critico $(0,0)$ no es ni máximo ni mínimo local de f
Ahora bien para $f(x,y)$ tomamos $x=-y$

$$f(x,-x)=0 \quad \forall x$$

por lo tanto el punto critico $(0,0)$ no es ni máximo ni mínimo local de f

Requerimos un criterio que dependa de la segunda derivada para que un punto sea extremo relativo. En el caso particular $n = 1$ el criterio es $f"(x) > 0$ y $f"(x) < 0$ para máximo o mínimo respectivamente para el contexto de varias variables usaremos el hessiano el cual esta definido por

$$Hf(x_0)h = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 t}{\partial x_i \partial x_j}(x_0|_{x_i x_j}).$$

Recordando un poco de la expresión de taylor

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p (x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p (y-y_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_p (x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}_p (x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_p (y-y_0)^2\right)$$

La expresión en rojo

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_p (x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}_p (x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_p (y-y_0)^2\right)$$

Define una forma cuadratica que podemos escribir

$$\frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

Teorema 2. *Sea* $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ *y* $H(h) = \frac{1}{2}[h_1, h_2]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ *entonces* $H(h)$ *es definida positiva si y solo si* $a > 0$ *y* $ac - b^2 > 0$.

Demostración. Tenemos

$$H(h) = \frac{1}{2}[h_1, h_2]\begin{bmatrix} ah_1 & bh_2 \\ bh_1 & ch_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_1^2)$$

si completamos el cuadrado

$$H(h) = \frac{1}{2}a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(c - \frac{b^2}{a}\right)h_2^2$$

supongamos que h es definida positiva. Haciendo $h_2 = 0$ vemos que $a > 0$. Haciendo $h_1 = -\frac{b}{a}h_2$ $c - \frac{b^2}{a} > 0$ ó $ac - b^2 > 0$ De manera analoga $H(h)$ es definida negativa si y solo si $a < 0$ y $ac - b^2 > 0$. ■

Criterio del máximo y del mínimo para funciones de dos variables Sea $f(x,y)$ de clase C^3 en un conjunto abierto u de $\mathbb{R}^2$. Un punto x_0, y_0 es un mínimo local (Estricto) de f si se cumple las siguientes tres condiciones:

I) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

II) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$

III) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ en (x_0, y_0) (Discriminante)

Si en II) tenemos < 0 en lugar de > 0 sin cambiar III) hay un máximo local

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = 2(x-1)^2 + 3(y-2)^2$ tenemos entonces que
$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x-1)$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 6(y-2)$
por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$ por lo tanto $x_0 = (1, 2)$ es un punto critico
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad H(1,2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0 \quad \forall\,(x, y) \in B_\epsilon(1, 2)$
podemos decir que f tiene un mínimo relativo en $(1, 2)$